

Theorie der Lichtverstärkung in absorbierenden Medien

W. ROTHER *

Physik-Department der Technischen Hochschule München

(Z. Naturforsch. **25 a**, 1120—1135 [1970]; eingegangen am 4. Mai 1970)

A general transient theory of light amplification in absorbing media is developed for small amplification and for small signal. The amplification by stimulated thermal Rayleigh scattering has been studied in detail for various shapes of the laser pulse. A transient gain is predicted when the frequencies of the pump and signal pulse are the same. The dependence of the amplification from the scattering angle was investigated. For narrow angles ($\Theta < 2 \times 10^{-2}$ rad) scattering of higher order in angle was calculated. A method of measuring the Rayleigh linewidth with one laser pulse is proposed.

1. Einleitung

In den letzten Jahren hat die stimulierte Lichtstreuung in absorbierenden Medien großes Interesse gefunden. Neben der stimulierten Brillouin-Streuung (SBS) ¹⁻⁹ und neben der stimulierten Rayleigh-Streuung (SRS) ¹⁰⁻¹³ treten in absorbierenden Medien neue stimulierte Streuprozesse auf, sogen. stimulierte thermische Streuprozesse. Diese stimulierte thermische Streuung erscheint innerhalb der Rayleigh-Linienbreite und innerhalb der Brillouin-Linienbreite und wird demgemäß als stimulierte thermische Rayleigh-Streuung (STRS) bzw. als stimulierte thermische Brillouin-Streuung (STBS) bezeichnet.

Diese neuen thermischen Streueffekte, die von HERMAN und GRAY ¹⁴ vor einigen Jahren theoretisch vorausgesagt wurden, sind von verschiedenen Auto-

ren experimentell beobachtet und untersucht worden. POHL et al. haben die STBS mit hochzeitauf lösenden Photodetektoren in einer Generator-Verstärkeranordnung nachgewiesen ¹⁵. Die STRS konnte von verschiedenen Autoren mit Hilfe von Fabry-Perot-Interferometern und zeitintegrierenden Photodetektoren in Flüssigkeiten beobachtet werden ¹⁶⁻¹⁹. Die Auswertung dieser Experimente war jedoch nicht zufriedenstellend, da ein stationärer Streuvorgang angenommen wurde. Kürzlich ist gezeigt worden ²⁰, daß die STRS ein extrem transientes Phänomen darstellt und ein Verhalten aufweist, das mit der stationären Theorie nicht erklärt werden kann.

Inzwischen sind die experimentellen und theoretischen Untersuchungen der STRS auf Gase ²¹⁻²³ und auf „mode-locked“-Impulslagen ²⁴⁻²⁶ ausgedehnt worden.

Sonderdruckanforderungen an Physik-Department der TH München, Institut Prof. Kaiser.

- * Neue Adresse: Messerschmitt-Bölkow-Blohm GmbH. (KN 13), 8 München.
- ¹ Y. R. SHEN u. N. BLOEMBERGEN, Phys. Rev. **137**, A 1787 [1965].
- ² N. M. KROLL, J. Appl. Phys. **36**, 34 [1965].
- ³ C. L. TANG, J. Appl. Phys. **37**, 2945 [1966].
- ⁴ D. L. BOBROFF, J. Appl. Phys. **36**, 1760 [1965].
- ⁵ F. BAROCCHI, J. Appl. Phys. **40**, 178 [1969].
- ⁶ K. GROB, Z. Phys. **201**, 59 [1967].
- ⁷ E. GARMIRE u. C. H. TOWNES, Appl. Phys. Letters **5**, 84 [1964]. — R. G. BREWER, Appl. Phys. Letters **5**, 127 [1964]. — R. G. BREWER u. K. E. RIEKHOF, Phys. Rev. Letters **13**, 334 [1964]. — M. MAIER, W. ROTHER u. W. KAISER, Phys. Letters **23**, 83 [1966]. — T. A. WIGGINS, R. B. WICK, N. D. FOLTZ, C. W. CHO u. D. H. RANK, J. Opt. Soc. Amer. **57**, 661 [1967]. — J. WALDER u. C. L. TANG, Phys. Rev. Letters **19**, 623 [1967]. — D. POHL, Phys. Letters **24** A, 239 [1967]. — Y. R. SHEN u. Y. J. SHAHAM, Phys. Rev. **163**, 224 [1967]. — S. L. SHAPIRO, J. A. GIORDMAINE u. K. W. WECHT, Phys. Rev. Letters **19**, 1093 [1967]. — I. L. FABELINSKII u. V. S. STARUNOV, Appl. Opt. **6**, 1793 [1967]. — G. WINTERLING, G. WALDA u. W. HEINICKE, Phys. Letters **26** A, 301 [1968]. — M. MAIER, W. ROTHER u. W. KAISER, Appl. Phys. Letters **10**, 80 [1967].
- ⁸ M. MAIER, Phys. Rev. **166**, 113 [1968].

- ⁹ D. POHL u. W. KAISER, Phys. Rev. **B 1**, 31 [1970].
- ¹⁰ N. BLOEMBERGEN, Amer. J. Phys. **35**, 989 [1967].
- ¹¹ V. S. STARUNOV, Phys. Letters **26** A, 428 [1968].
- ¹² G. I. ZAITSEV, YU. I. KYZYLASOV, V. S. STARUNOV u. I. L. FABELINSKII, J. Exp. Theor. Phys. USSR **6**, 255 [1967].
- ¹³ I. L. FABELINSKII, D. I. MASH, V. V. MOROZOV u. V. S. STARUNOV, Phys. Letters **22** A, 253 [1968].
- ¹⁴ R. M. HERMAN u. M. A. GRAY, Phys. Rev. Letters **19**, 824 [1967].
- ¹⁵ D. POHL, I. REINHOLD u. W. KAISER, Phys. Rev. Letters **20**, 1141 [1968].
- ¹⁶ D. H. RANK, C. W. CHO, N. D. FOLTZ u. T. A. WIGGINS, Phys. Rev. Letters **19**, 828 [1967].
- ¹⁷ T. A. WIGGINS, C. W. CHO, D. R. DIETZ u. N. D. FOLTZ, Phys. Rev. Letters **20**, 831 [1968].
- ¹⁸ C. W. CHO, N. D. FOLTZ, D. H. RANK u. T. A. WIGGINS, Phys. Rev. **175**, 271 [1968].
- ¹⁹ F. GIRES, C. R. Acad. Sci. Paris **266** B, 596 [1968].
- ²⁰ W. ROTHER, D. POHL u. W. KAISER, Phys. Rev. Letters **22**, 915 [1969].
- ²¹ M. A. GRAY u. R. M. HERMAN, Phys. Rev. **181**, 374 [1969].
- ²² T. A. WIGGINS, C. W. CHO, D. R. DIETZ u. N. D. FOLTZ, Phys. Rev. Letters **20**, 831 [1968].
- ²³ D. R. DIETZ, C. W. CHO u. T. A. WIGGINS, Phys. Rev. **182**, 259 [1969].
- ²⁴ M. E. MACK, Phys. Rev. Letters **22**, 13 [1969].
- ²⁵ D. POHL, Phys. Rev. Letters **23**, 711 [1969].
- ²⁶ M. E. MACK, Ann. New York Acad. Sci. **168**, 419 [1970].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Die Theorie der stimulierten Lichtstreuung in transparenten Medien ist für die SBS in der Literatur eingehend behandelt worden¹⁻⁶. Vor einigen Jahren haben Herman und Gray ein Gleichungssystem aufgestellt, das allgemein die stimulierte Lichtstreuung in transparenten und absorbierenden Medien beschreibt¹⁴. Ursprünglich sind nur die stationären Lösungen diskutiert worden^{14, 27}. Wie gezeigt wurde, enthalten jedoch die nichtstationären Lösungen neue, transiente Effekte, die für viele experimentelle Situationen von Bedeutung sind^{9, 20, 28}.

In der hier vorliegenden Arbeit soll eine Theorie entwickelt werden, die allgemein die transiente Verstärkung von Licht durch stimuliertes Streuung an Dichtefluktuationen für kleine Verstärkung und für kleines Signal beschreibt. Im Hinblick auf die experimentellen Untersuchungen, über die in Ref. ²⁹ berichtet wird, soll die STRS als spezieller Fall eingehend diskutiert werden. Es wird gezeigt, daß ein schwacher Lichtimpuls durch einen intensiven Impuls verstärkt werden kann, auch für den Fall, daß die Frequenzen der beiden Impulse gleich sind.

Die Abhängigkeit der stimulierten Streuung vom Streuwinkel wird in einem weiteren Kapitel untersucht. Das Ergebnis zeigt, daß in Vorwärtsrichtung die STRS besonders begünstigt ist.

Wenn zwei Lichtbündel gleicher Frequenz in einem absorbierenden Medium unter sehr kleinem Winkel miteinander wechselwirken, so können, wie von verschiedenen Autoren beobachtet wurde^{24, 26, 30}, zusätzliche Lichtbündel in neue Richtungen erzeugt werden. Dieser Prozeß, der als induzierte Beugung an Dichtefluktuationen oder als Streuung höherer Ordnung aufgefaßt werden kann, soll für die nichtstationäre Situation bei kleiner Verstärkung theoretisch untersucht werden. Es wird gezeigt, daß diese induzierte Beugung nur auftreten kann, wenn der Winkel zwischen den beiden ursprünglichen Lichtbündeln kleiner ist als $2 \cdot 10^{-2}$ rad. Im letzten Kapitel wird eine Methode vorgeschlagen, mit der die Rayleigh-Linienbreite Γ_R experimentell mit einem einzigen Laserschuß bestimmt werden kann. Für diese Methode ist Voraussetzung, daß die Dauer des Laserimpulses von der Größenordnung der reziproken Rayleigh-Linienbreite Γ_R^{-1} ist.

2. Wechselwirkung zweier Lichtwellen in einem absorbierenden Medium

Die Ausbreitung von Licht in einem absorbierenden, homogenen Medium mit dem Absorptionskoeffizienten α wird durch eine nichtlineare Wellengleichung beschrieben

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\alpha c}{n} \frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{c}{n} \right)^2 \nabla^2 \right] \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\gamma^e}{n^2 \varrho_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2} [\varrho_1(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)]. \quad (1)$$

Die elektrische Feldstärke \mathbf{E} der Lichtwelle ist über die Konstante $\gamma^e = \varrho_0 (\partial \varepsilon / \partial \varrho)_T$ an die Dichtefluktuation $\varrho_1(\mathbf{r}, t)$ gekoppelt. Diese Konstante, die als elektro-optische Kopplungskonstante bezeichnet wird, läßt sich für Flüssigkeiten mit Hilfe der Clausius-Mosotti-Gleichung berechnen:

$$\gamma^e = (n^2 - 1) (n^2 + 2) / 3.$$

n ist der Brechungsindex des Mediums.

Die Kopplung der Lichtwelle an die Temperaturfluktuation $T_1(\mathbf{r}, t)$ über die Größe $(\partial \varepsilon / \partial T)_\varrho$ ist im Vergleich zur Kopplung an die Dichte sehr klein und wurde daher in Gl. (1) vernachlässigt^{27, 31}. Unser Medium wird thermodynamisch durch die beiden unabhängigen Variablen Temperatur T und Dichte ϱ vollkommen beschrieben. Diese Variablen lassen sich in einen Gleichgewichtsterm und in einen Fluktuationsterm entwickeln

$$T = T_0 + T_1(\mathbf{r}, t),$$

$$\varrho = \varrho_0 + \varrho_1(\mathbf{r}, t).$$

Unter der Annahme $T_1/T_0, \varrho_1/\varrho_0 \ll 1$ können aus den hydrodynamischen Gleichungen zwei Bewegungsgleichungen für ϱ_1 und T_1 hergeleitet werden:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{v^2}{\gamma} + \frac{\eta}{\varrho_0} \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^2 \right] \varrho_1(\mathbf{r}, t) = \frac{v^2 \beta \varrho_0}{\gamma} \nabla^2 T_1(\mathbf{r}, t) - \frac{\gamma^e}{8 \pi} \nabla^2 \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

$$\left[\varrho_0 c_v \frac{\partial}{\partial t} - \lambda \nabla^2 \right] T_1(\mathbf{r}, t) = \frac{c_v (\gamma - 1)}{\beta} \frac{\partial}{\partial t} \varrho_1(\mathbf{r}, t) + \frac{n c \alpha}{4 \pi} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t). \quad (3)$$

²⁷ I. P. BATRA u. R. H. ENNS, Phys. Rev. **185**, 396 [1969]. — ²⁸ R. H. ENNS u. I. P. BATRA, Can. J. Phys. **47**, 2265 [1969].

²⁹ W. ROTHER, H. MEYER u. W. KAISER, Z. Naturforsch. **25 a**, 1136 [1970].

³⁰ M. E. MACK, Appl. Phys. Letters **12**, 329 [1968]. — H. EICHLER u. B. KLUZOWSKI, Z. Angew. Phys. **27**, 4 [1969].

³¹ H. Z. CUMMINS u. R. W. GAMMON, J. Chem. Phys. **44**, 2785 [1966].

v ist die Schallgeschwindigkeit des Mediums, $\gamma = c_p/c_v$ ist das Verhältnis der spezifischen Wärmen, λ und β sind die Koeffizienten der Wärmeleitung bzw. der thermischen Ausdehnung. $\eta = (4/3) \eta_S + \eta_B$ ist für die Dämpfung der Dichtewelle verantwortlich, wobei η_S die Scher- und η_B die Volumenviskosität bezeichnet. Die linken Seiten der Gln. (2) und (3) beschreiben die freie Bewegung von ϱ_1 und T_1 , während die rechten Seiten sogen. Erzeugungssterme enthalten. Lichtwellen können in einem Medium Dichte- und Temperaturfluktuationen sowohl durch Elektrostriktion als auch durch Absorption erzeugen. Das Gleichungssystem (1) bis (3) gilt streng nur für Flüssigkeiten. Durch entsprechende Definition der Parameter können die Gleichungen bedingt auch auf Festkörper und Gase angewendet werden.

Es soll nun im folgenden aus den beiden Gln. (2) und (3) $\varrho_1(\mathbf{r}, t)$ berechnet werden für den speziellen Fall, daß zwei ebene, monochromatische Lichtwellen \mathbf{E}_0 und \mathbf{E}_1 in dem Medium miteinander wechselwirken. \mathbf{E}_0 bezeichnet eine intensive Pumpwelle und \mathbf{E}_1 eine schwache Signalwelle. Beide Wellen sind senkrecht zur Streuebene polarisiert. Als Streuebene wählen wir die (xy) -Ebene. Für beide Wellen setzen wir an

$$\mathbf{E}_m(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{y} [E_m(\mathbf{r}, t) \exp\{i \omega_m t - i(1 - i \alpha/2 k_m) \mathbf{k}_m \mathbf{r}\} + \text{c.c.}] \quad (4)$$

Durch Wechselwirkung der beiden Lichtwellen im Medium entstehen eine Dichte- und eine Temperaturwelle der Form

$$\varrho_1(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [\bar{\varrho}_1(\mathbf{r}, t) \exp\{i(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r})\} + \text{c.c.}], \quad (5)$$

$$T_1(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [\bar{T}_1(\mathbf{r}, t) \exp\{i(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r})\} + \text{c.c.}]. \quad (6)$$

Für die Frequenz ω und für den Wellenzahlvektor \mathbf{k} gelten die Relationen

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 - \omega_1, \\ \mathbf{k} &= \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_1. \end{aligned}$$

Der Betrag von \mathbf{k} ist gegeben durch

$$k = 2 k_0 \sin(\Theta/2). \quad (7)$$

Θ bezeichnet den Streuwinkel zwischen \mathbf{k}_0 und \mathbf{k}_1 . Wir führen nun kartesische Koordinaten in der Weise ein, daß die Signalwelle \mathbf{E}_1 stets in positive z -Richtung läuft, während die Pumpwelle \mathbf{E}_0 sich in der (xy) -Ebene ausbreitet. Wenn wir den speziellen Fall einer 90° -Streuung ausschließen, dann können wir an der Stelle $z=0$ für beide Wellen eine ebene

Randbedingung mit konstanten Amplituden wählen. Diese Randbedingung bringt den Vorteil, daß alle Lösungen nur von der z -Koordinate abhängen.

Setzen wir den Ansatz (4) – (6) in die beiden Gln. (2) und (3) ein, so erhalten wir ein System von 2 linearen, inhomogenen Differentialgleichungen:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} + (\Gamma_B' + 2i\omega) \frac{\partial}{\partial t} + \left(\frac{\omega_B^2}{\gamma} - \omega^2 + i\omega \Gamma_B' \right) \right] \cdot \bar{\varrho}_1(z, t) + \frac{\omega_B^2 \beta \varrho_0}{\gamma} \bar{T}_1(z, t) \quad (8)$$

$$= \frac{\gamma^e k^2}{8\pi} E_0(z, t) E_1^*(z, t) \exp\{-\alpha z(1 + 1/\cos \Theta)/2\} - (\gamma - 1) \left(\frac{\partial}{\partial t} + i\omega \right) \bar{\varrho}_1(z, t) + \varrho_0 \beta \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\gamma \Gamma_R}{2} + i\omega \right) \bar{T}_1(z, t) \quad (9)$$

$$= \frac{\gamma \gamma^a k}{8\pi v} E_0(z, t) E_1^*(z, t) \exp\{-\alpha z(1 + 1/\cos \Theta)/2\}$$

Es wurden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$\Gamma_B' = \eta k^2 / \varrho_0,$$

$$\Gamma_R = 2 k^2 \lambda / \varrho_0 c_p$$

$$\text{und} \quad \gamma^a = v c^2 \alpha \beta / \omega_0 c_p \sin(\Theta/2).$$

Γ_R ist die Rayleigh-Linienbreite und Γ_B' ist die Brillouin-Linienbreite ohne Berücksichtigung der Wärmeleitung. γ^a wird als thermo-optische Kopplungskonstante bezeichnet. Man beachte, daß im Gegensatz zur elektro-optischen Kopplungskonstanten γ^e diese neue Konstante vom Streuwinkel Θ abhängt. Die Brillouin-Frequenzverschiebung ω_B ist gegeben durch die Relation $\omega_B = v k$.

Auf Grund der Annahme einer kleinen Verstärkung konnten wir in den Gln. (8) und (9) alle z -Ableitungen vernachlässigen. Die Dichteamplitude $\bar{\varrho}_1$ muß daher im Frequenzbereich $\omega \approx 0$ die Bedingungen erfüllen

$$\left| \frac{1}{\bar{\varrho}_1} \frac{\partial}{\partial z} \bar{\varrho}_1 \right| \ll k_0, \quad (10 \text{ a}) \quad \left| \frac{1}{\bar{\varrho}_1} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{\varrho}_1 \right| \ll k^2. \quad (10 \text{ b})$$

Für den Frequenzbereich $\omega \approx \omega_B$ sind diese Bedingungen noch weiter eingeschränkt:

$$\left| \frac{1}{\bar{\varrho}_1} \frac{\partial}{\partial z} \bar{\varrho}_1 \right| \ll \frac{\Gamma_B'}{\omega_B} k_0, \quad (11 \text{ a})$$

$$\left| \frac{1}{\bar{\varrho}_1} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{\varrho}_1 \right| \ll \frac{\Gamma_B'}{\omega_B} k^2. \quad (11 \text{ b})$$

Ähnliche Bedingungen wie (10 a) und (10 b) gelten

über den ganzen Frequenzbereich für die Temperaturfluktuation T_1 und für die Signal-Feldstärke E_1 .

Bei Streuung in Rückwärtsrichtung sind diese Bedingungen im allgemeinen leicht erfüllt, da $k = 2 k_0$ für die Rubinlaserfrequenz ca. 10^5 cm^{-1} beträgt und Γ_B'/ω_B von der Größenordnung 10^{-1} bis 10^{-2} ist. Da der Wellenvektor \mathbf{k} aber bei kleinen Streuwinkeln kleiner wird, siehe Gl. (7), müssen diese Bedingungen bei sehr kleinen Streuwinkeln genauer geprüft werden. Für ein beugungsbegrenztes Laserbündel beträgt die Divergenz ca. 10^{-3} rad. Es ist daher sinnvoll, in einer Theorie Streuwinkel nur bis zu einem minimalen Winkel $\Theta = 10^{-3}$ rad zu diskutieren. Für diesen minimalen Streuwinkel erhalten wir für k^2 als unteren Wert 10^4 cm^{-2} . Bei kleiner Verstärkung wird daher die Bedingung (10 b) für

alle realistischen Streuwinkel leicht erfüllt, und im Bereich $\omega \approx 0$ dürfen daher stets die z -Ableitungen vernachlässigt werden. Da aber das Verhältnis Γ_B'/ω_B bei diesen kleinen Streuwinkeln 10^{-4} bis 10^{-5} beträgt, werden die Bedingungen (11 a) und (11 b) bei diesen kleinen Winkeln für die Brillouin-Linie nicht mehr erfüllt, und die z -Ableitungen dürfen nicht vernachlässigt werden.

In dieser Theorie beschränken wir uns nur auf solche Situationen, wo die Bedingungen (10) und (11) gelten.

Das Differentialgleichungssystem (8) und (9) soll nun mit Hilfe einer Fourier-Transformation gelöst werden. Führt man in den beiden Gleichungen eine Fourier-Transformation durch, so erhält man zwei algebraische Gleichungen für die Fourier-Transformierten

$$R(z, \omega, \bar{\omega}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \bar{\varrho}_1(z, \omega, t) \exp\{-i\bar{\omega}t\} \quad \text{und} \quad Q(z, \omega, \bar{\omega}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \bar{T}_1(z, \omega, t) \exp\{-i\bar{\omega}t\}.$$

Aus den beiden algebraischen Gleichungen kann $Q(z, \omega, \bar{\omega})$ eliminiert werden und wir erhalten für $R(z, \omega, \bar{\omega})$ den Ausdruck

$$R(z, \omega, \bar{\omega}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' r(\omega, \bar{\omega}) E_0(z, t') E_1^*(z, t') \exp\{-i\bar{\omega}t' - \alpha z(1 + 1/\cos \Theta)/2\}, \quad (12)$$

wobei

$$r(\omega, \bar{\omega}) = \frac{k^2}{8\pi} \frac{\gamma^e [\gamma \Gamma_R/2 + i(\omega + \bar{\omega})] - \gamma^a \omega_B}{[\gamma \Gamma_R/2 + i(\omega + \bar{\omega})] [-(\omega + \bar{\omega})^2 + i\Gamma_B'(\omega + \bar{\omega})] + \omega_B^2 [\Gamma_R/2 + i(\omega + \bar{\omega})]}. \quad (13)$$

Die Fourier-Rücktransformation liefert wieder die zeitabhängige Amplitude der Dichtewelle

$$\bar{\varrho}_1(z, \omega, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega r'(\Omega) \exp\{i\Omega(t - t')\}. \quad (14)$$

Da $r(\omega, \bar{\omega})$ eine Funktion von $(\omega + \bar{\omega})$ ist, kann eine formale Substitution durchgeführt werden

$$\Omega = \omega + \bar{\omega}, \quad r(\omega, \bar{\omega}) \rightarrow r'(\Omega).$$

Mit (12) und (14) erhält man für die zeitabhängige Dichteamplitude

$$\bar{\varrho}_1(z, \omega, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' E_0(z, t') E_1^*(z, t') F(t, t') \exp\{i\omega(t - t') - \alpha z(1 + 1/\cos \Theta)/2\}, \quad (15)$$

wobei

$$F(t, t') = \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega r'(\Omega) \exp\{i\Omega(t - t')\}. \quad (16)$$

Das nächste Ziel ist, das Integral (16) zu berechnen. Zu diesem Zweck soll der Ausdruck $r'(\Omega)$ durch Partialbruchzerlegung auf eine einfachere Form gebracht werden. Um dies zu erreichen, müssen von $r'(\Omega)$ zunächst die Nullstellen des Nenners für Ω gefunden werden. Das führt auf das Problem der Lösung einer kubischen Gleichung. Prinzipiell ist es möglich, eine kubische Gleichung algebraisch exakt zu lösen, doch ist es hier günstiger, nach einer Näherungslösung zu suchen, die von der Eigenschaft Γ_R/ω_B , $\Gamma_B'/\omega_B \ll 1$ Gebrauch macht.

Die Näherungslösung liefert in erster Ordnung in Γ_R/ω_B bzw. Γ_B'/ω_B für Ω folgende Nullstellen:

$$\Omega_1 = i \Gamma_R/2, \quad \Omega_{2,3} = \pm \omega_B + i \Gamma_B/2. \quad (17)$$

Der neue Ausdruck für die Brillouin-Linienbreite Γ_B berücksichtigt die Dämpfung der Dichtewelle durch Wärmeleitungsverluste

$$\Gamma_B = \frac{k^2}{\varrho_0} [\eta + \lambda(1/c_v - 1/c_p)]. \quad (18)$$

Mit den bekannten Nullstellen kann $r'(\Omega)$ in drei Partialbrüche zerlegt werden. Unter Berücksichtigung von Γ_R/ω_B , $\Gamma_B/\omega_B \ll 1$ erhält man

$$r'(\Omega) = \frac{k}{16\pi v} \left[\frac{2i(\gamma^a - \gamma^c)}{\Omega - i\Gamma_R/2} + \frac{\gamma^e - i(\gamma^a - \gamma^c)}{\Omega + \omega_B - i\Gamma_B/2} - \frac{\gamma^e + i(\gamma^a - \gamma^c)}{\Omega - \omega_B - i\Gamma_B/2} \right]. \quad (19)$$

In Gl. (19) wurde eine neue Kopplungskonstante eingeführt:

$$\gamma^e = \gamma^e \Gamma_R (\gamma - 1) / 2 \omega_B. \quad (20)$$

Wie später gezeigt wird, ist diese Kopplungskonstante u. a. für die reine stimulierte Rayleigh-Streuung verantwortlich.

Mit Hilfe des neuen Ausdrucks für $r'(\Omega)$ lässt sich das Integral (16) sehr einfach berechnen.

$$\begin{aligned} F(t, t') = & -\frac{k}{16v} [1 + \text{sign}(t - t')] \{ 2(\gamma^a - \gamma^c) \exp\{-\Gamma_R |t - t'|/2\} \\ & + i[\gamma^e + i(\gamma^a - \gamma^c)] \exp\{-\Gamma_B |t - t'|/2 + i\omega_B(t - t')\} \\ & + i[-\gamma^e + i(\gamma^a - \gamma^c)] \exp\{-\Gamma_B |t - t'|/2 - i\omega_B(t - t')\} \}. \end{aligned} \quad (21)$$

Da die Dichteamplitude $\bar{\varrho}_1$ jetzt durch Gl. (15) und (21) bekannt ist, können wir im weiteren ϱ_1 aus der Wellengleichung (1) eliminieren.

Mit Hilfe des Ansatzes (4) und (5) und unter Annahme kleiner Verstärkung bekommen wir aus Gl. (1) für die Amplitude E_1 die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial z} E_1(z, t) = -\frac{i\gamma^e \omega_1}{4nc\varrho_0} \bar{\varrho}_1^*(z, t) E_0(t) \exp\{\alpha z(1 - 1/\cos\Theta)/2\}. \quad (22)$$

Die Amplitude der Pumpwelle E_0 kann wegen der Annahme eines kleinen Signals $E_1/E_0 \ll 1$ räumlich als konstant angenähert werden.

$\bar{\varrho}_1^*(z, t)$ wird nun aus (22) eliminiert und man erhält

$$\frac{\partial}{\partial z} E_1(z, t) = \exp\{-\alpha z/\cos\Theta\} \sum_{j=1}^3 A_j \int_{-\infty}^t dt' \sqrt{I_0(t) I_0(t')} E_1(z, t') \exp\{-f_j(t - t')\}. \quad (24)$$

$I_0 = n c |E_0|^2 / 8\pi$ ist die Pumpintensität an der Stelle $z=0$. Zur kürzeren Darstellung wurden die Größen A_j und f_j eingeführt:

$$A_1 = i(\hat{g}_R^a - \hat{g}_R^c) \Gamma_R/2, \quad A_{2,3} = [\mp \hat{g}_B^e/2 - i(g_B^a - g_B^c)] \Gamma_B/2, \quad (25a)$$

$$f_1 = \Gamma_R/2 - i\omega, \quad f_{2,3} = \Gamma_B/2 - i(\omega \pm \omega_B). \quad (25b)$$

Die verschiedenen g -Faktoren in (25 a) sind die maximalen stationären Gewinnfaktoren von verschiedenen stimulierten Streuprozessen. Sie sind definiert:

$$\hat{g}_B^e = a\gamma^e/\Gamma_B, \quad \hat{g}_B^a = a\gamma^a/2\Gamma_B, \quad \hat{g}_B^c = a\gamma^c/2\Gamma_B, \quad \hat{g}_R^a = a\gamma^a/\Gamma_R, \quad \hat{g}_R^c = a\gamma^c/\Gamma_R, \quad (26)$$

wobei

$$a = \gamma^e \omega_1 k/2 n^2 c^2 v \varrho_0.$$

Der obere Index charakterisiert die Kopplung, während der untere Index den wirksamen Frequenzbereich der Streuung – Brillouin- oder Rayleigh-Linienbreite – angibt. Die verschiedenen g -Faktoren werden im nächsten Kapitel ausführlich diskutiert.

Gleichung (24) stellt eine Integro-Differentialgleichung dar, die in allgemeiner Form die zeitabhängige Verstärkung der Signalamplitude E_1 durch stimulierte Streuung an Dichteplattationen beschreibt. Im weiteren sollen nun Lösungen dieser Gleichung für verschiedene physikalische Situationen untersucht werden.

3. Stationäre Lösung

Als spezieller Fall soll zuerst die stationäre Lösung der Gl. (24) gesucht werden.

Eine stationäre Lösung liegt vor, wenn $E_0(t)$ und $E_1(z, t)$ sich innerhalb der Abklingzeit der Dichteplattation wenig ändert, wenn also gilt

$$\left| \frac{1}{E_0} \frac{\partial}{\partial t} E_0 \right|, \quad \left| \frac{1}{E_1} \frac{\partial}{\partial t} E_1 \right| \ll \Gamma_R, \Gamma_B.$$

Unter dieser Voraussetzung können E_1 und I_0 vor das Integral gezogen werden, da nur der sich schnell ändernde Term $\exp\{f_j t'\}$ einen wesentlichen Beitrag zur Integration liefert.

Nach Integration über dt' erhält man für die Intensität

$$\tilde{I}_1(z, t) = I_1(z, t) e^{\alpha z} = n c |E_1|^2 / 8 \pi$$

die Gleichung

$$\frac{1}{\tilde{I}_1} \frac{\partial}{\partial z} \tilde{I}_1 = g_{\text{stat}} I_0 e^{-\alpha z / \cos \theta} \quad (27)$$

mit $g_{\text{stat}} = \sum_{j=1}^3 (A_j f_j^x + A_j^x f_j) / |f_j|^2$. (28)

Die rechte Seite der Gl. (27) ist in absorbierenden Medien eine Funktion von z . Der Einfachheit wegen beschränken wir uns auf den Fall $|\alpha z / \cos \theta| \ll 1$ und erhalten nach Integration über dz die Beziehung

$$I_1(z, t) = I_1(0, t) \exp\{g_{\text{stat}} I_0 z - \alpha z\}. \quad (29)$$

Gleichung (29) zeigt, daß die Verstärkung des Signals $I_1(0, t)$ im wesentlichen durch den Verstärkungsfaktor g_{stat} charakterisiert ist. Die Auswertung des Ausdrucks (28) ergibt, daß g_{stat} sich sinnvoll aus drei g -Faktoren zusammensetzen läßt:

$$g_{\text{stat}} = g^e + g^a + g^c. \quad (30)$$

Diese einzelnen g -Faktoren beschreiben verschiedene stimulierte Streuprozesse, die sich hinsichtlich des Mechanismus für die Erzeugung der Dichteplattationen unterscheiden.

Wir wollen diese im einzelnen diskutieren. Für g^e erhalten wir:

$$g^e = \hat{g}_B^e \left[\frac{(\Gamma_B/2)^2}{(\Gamma_B/2)^2 + (\omega - \omega_B)^2} - \frac{(\Gamma_B/2)^2}{(\Gamma_B/2)^2 + (\omega + \omega_B)^2} \right]. \quad (31)$$

g^e stellt den stationären Verstärkungsfaktor der stimulierten Brillouin-Streuung dar. Die Dichteplattationen werden bei diesem Streuprozess durch reine Elektrostriktion erzeugt. Der spektrale Verlauf von g^e ist in Abb. 1 a für den speziellen Fall $\omega_B/\Gamma_B = 10$ dargestellt.

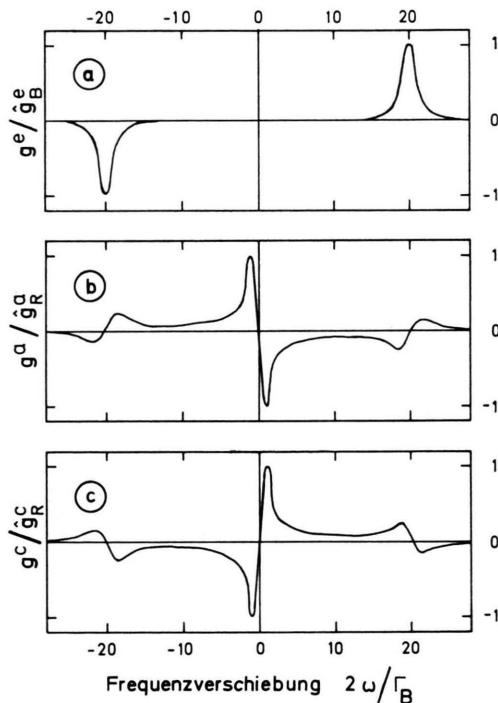


Abb. 1 a – c. Schematischer Verlauf der normierten, stationären Gewinnfaktoren g^e/\hat{g}_B^e , g^a/\hat{g}_R^a und g^c/\hat{g}_R^c als Funktion der normierten Frequenzverschiebung $2\omega/\Gamma_B$ ($2\omega_B/\Gamma_B = 20$, $2\Gamma_B/\Gamma_R = 5$).

g^e liefert für positive Frequenzverschiebungen (Stokes-Seite) im Bereich $\omega \approx \omega_B$ Verstärkung, während bei negativen Frequenzverschiebungen (anti-Stokes-Seite) die eintretende Signalwelle geschwächt wird.

Mit dem Verstärkungsfaktor g^a werden die sogen. stimulierten thermischen Streuprozesse beschrieben.

$$g^a = -\hat{g}_R^a \frac{\omega \Gamma_R}{(\Gamma_R/2)^2 + \omega^2} + \hat{g}_B^a \left[\frac{(\omega + \omega_B) \Gamma_B}{(\Gamma_B/2)^2 + (\omega + \omega_B)^2} + \frac{(\omega - \omega_B) \Gamma_B}{(\Gamma_B/2)^2 + (\omega - \omega_B)^2} \right] \quad (32)$$

Bei diesen Streuprozessen entstehen die Dichtefluktuationen durch lokales Aufheizen des Mediums infolge der Absorption des Lichts. g^a ist daher dem Absorptionskoeffizienten α proportional. Auf Grund des spektralen Verlaufs von g^a (siehe Abb. 1 b) bezeichnet man den stimulierten Streueffekt, der durch den 1. Term beschrieben wird, als stimulierte thermische Rayleigh-Streuung, den Effekt, der durch den 2. Term beschrieben wird, als stimulierte thermische Brillouin-Streuung. Es ist charakteristisch für den stationären Streuvorgang, daß an der Stelle $\omega = 0$ die Verstärkung verschwindet. Wie später gezeigt wird, enthalten die nichtstationären Lösungen eine positive transiente Verstärkung für $\omega = 0$. Man beachte, daß die STRS im Gegensatz zur SBS positive Verstärkung auf der anti-Stokes-Seite liefert. Das Verhältnis der maximalen Verstärkungsfaktoren von STRS und STBS erhält man aus (26) und (31): $\hat{g}_R^a/\hat{g}_B^a = 2 \Gamma_B/\Gamma_R$. Bei Flüssigkeiten ist dieses Verhältnis i. allg. von der Größenordnung 20 bis 70. Es kann in einigen Ausnahmefällen jedoch auch bedeutend kleiner sein wie z. B. bei CS_2 , wo das Verhältnis infolge der kleinen Brillouin-Linienbreite ungefähr 4 beträgt. Da g^a proportional α ist, kann z. B. durch Lösen verschiedener Farbstoffmengen in der verstärkenden Flüssigkeit der Wert von g^a variiert werden. Für viele Flüssigkeiten ist \hat{g}_B^e von der Größenordnung 0,01 bis 0,1 cm/MW und \hat{g}_R^a/α ungefähr 0,3 bis 0,9 cm²/MW. Bereits bei relativ kleinem Absorptionskoeffizienten, d. h. α von der Größenordnung 0,2 cm⁻¹, kann die stationäre Verstärkung durch STRS die stationäre Verstärkung durch

SBS übertreffen. Bei hohen Absorptionen bekommen wir sehr große Verstärkungsfaktoren.

Komplizierter ist der Erzeugungsmechanismus für die Dichtefluktuationen bei den stimulierten Streuprozessen, die durch den Verstärkungsfaktor g^e beschrieben werden. Dieser Mechanismus beruht im wesentlichen darauf, daß mit der elektrostriktiv erzeugten Dichtefluktuation eine Temperaturfluktuation verbunden ist [siehe Gl. (3)], die einen thermischen Streuprozeß auch in transparenten Medien hervorruft. Das spektrale Verhalten von g^e ist g^a sehr ähnlich (Abb. 1 c) und unterscheidet sich nur durch ein anderes Vorzeichen.

$$g^e = \hat{g}_R^e \frac{\omega \Gamma_R}{(\Gamma_R/2)^2 + \omega^2} - \hat{g}_B^e \left[\frac{(\omega + \omega_B) \Gamma_B}{(\Gamma_B/2)^2 + (\omega + \omega_B)^2} + \frac{(\omega - \omega_B) \Gamma_B}{(\Gamma_B/2)^2 + (\omega - \omega_B)^2} \right] \quad (33)$$

Der 1. Term stellt den Verstärkungsfaktor der reinen SRS dar, während der 2. Term einen weiteren stimulierten Streuprozeß liefert, der in der Literatur bisher noch nicht beschrieben worden ist. Aus (20) und (26) folgt $\hat{g}_B^e/\hat{g}_B^a = \Gamma_R(\gamma - 1)/4\omega_B$. Für Flüssigkeiten ist das Verhältnis Γ_R/ω_B i. allg. sehr klein. Der Gewinnfaktor \hat{g}_B^e ist daher ungefähr 10⁻³-mal kleiner als der Gewinnfaktor für reine SBS. Es wird deshalb kaum möglich sein, diesen Effekt in Flüssigkeiten zu beobachten. Etwas günstiger ist jedoch das Verhältnis bei Gasen, wo infolge der kleineren Schallgeschwindigkeit ω_B kleiner ist und die Rayleigh-Linienbreite mit abnehmendem Druck größer wird ($\Gamma_R \propto 1/\rho_0$). Das Verhältnis \hat{g}_B^e/\hat{g}_B^a kann daher bei Gasen ein bis zwei Größenordnungen größer sein als bei Flüssigkeiten.

In Tab. 1 sind für eine Reihe von Flüssigkeiten die wichtigsten Materialparameter zusammengestellt. Mit Hilfe dieser Parameter wurden für die Rubinlaserfrequenz die Rayleigh-Linienbreite $\Gamma_R/2\pi$, der auf den Absorptionskoeffizienten α bezogene, maxi-

Substanz	n	γ^e	ρ_0 [g/cm ³]	$c_p \times 10^{-7}$	$\lambda \times 10^{-4}$ [erg/cm sec °K]	$\beta \times 10^3$ [°K ⁻¹]	$\gamma = c_p/c_v$
CCl_4	1.46	1,55	1,6	0,84	1,037	1,22	1,5
Methanol	1,33	0,96	0,79	2,5	2,11	1,2	
CS_2	1,62	2,52	1,26	0,95	1,6	1,2	1,65
Benzol	1,5	1,8	0,88	1,7	1,49	1,23	
H_2O	1,33	0,96	1,0	4,18	6,03	0,24	$\cong 1$
Aceton	1,36	1,09	0,79	2,21	1,8	1,43	1,4
Äthanol	1,36	1,1	0,79	2,43	1,8	1,1	

Tab. 1. Materialparameter von verschiedenen Flüssigkeiten.

Substanz	$\omega_B/2\pi$ [MHz]	$\Gamma_B/2\pi$ [MHz]	$\Gamma_R/2\pi$ [MHz]	\hat{g}_R^a/α [cm ² /MW]	\hat{g}_R^c [cm/MW]	\hat{g}_B^e [cm/MW]
CCl ₄	4200	630 a	17	0,82	$2,6 \cdot 10^{-4}$	0,007
Methanol	4250	301 a	20	0,32		0,0115
CS ₂	5800	74 b	36	0,62	$6 \cdot 10^{-4}$	0,145
Benzol	6500	348 a	24	0,57		0,02
H ₂ O	5700	382 a	27,5	0,019		0,0053
Aceton	4500	219 b	21	0,47	$2 \cdot 10^{-4}$	0,02
Äthanol	4550	425 a	18	0,38		0,01

Tab. 2. Brillouin-Frequenz $\omega_B/2\pi$, Brillouin- und Rayleigh-Linienbreite $\Gamma_B/2\pi$, $\Gamma_R/2\pi$ und maximale, stationäre Gewinnfaktoren g_B^e , g_R^c und g_R^a/α von verschiedenen Flüssigkeiten. $\Gamma_B/2\pi$ aus Literatur: a) R. Y. CHIAO u. P. A. FLEURY ³²; b) A. LAUBEREAU, W. ENGLISCH u. W. KAISER ³³.

male stationäre Gewinnfaktor der STRS g_R^a/α und der maximale stationäre Gewinnfaktor der reinen stimulierten Rayleigh-Streuung \hat{g}_R^c berechnet. Die Werte für die Brillouin-Linienbreite $\Gamma_B/2\pi$ wurden aus der Literatur entnommen und damit der maximale stationäre Gewinnfaktor \hat{g}_B^e der SBS berechnet. Die berechneten Werte sind in Tab. 2 zusammengestellt. Ein Vergleich der verschiedenen Gewinnfaktoren zeigt, daß \hat{g}_R^c gegenüber \hat{g}_B^e sehr klein ist. Unter den aufgeführten Substanzen finden wir für die SBS den größten Gewinnfaktor bei CS₂. Dagegen besitzt CCl₄ den größten Gewinnfaktor für die STRS. Bemerkenswert ist der relativ kleine Wert des Gewinnfaktors der STRS für Wasser. Die Ursache hierfür liegt an dem relativ kleinen thermischen Ausdehnungskoeffizienten und an dem hohen Koeffizienten der Wärmeleitung.

4. Allgemeine nichtstationäre Lösung

Wir wenden uns jetzt den nichtstationären Lösungen der Gl. (24) zu. Von den stationären Lösungen haben wir gelernt, daß die Verstärkung von Licht durch stimuliertes Streuung an Dichtefluktuationen in drei Frequenzbereichen wirksam ist, nämlich im Bereich der Rayleigh-Linienbreite und im Bereich der Stokes und anti-Stokes verschobenen Brillouin-Linienbreite. Dieses Verhalten gibt uns die Möglichkeit, in den verschiedenen Frequenzbereichen nach separaten Lösungen zu suchen. Wir dürfen also Gl. (24) in drei unabhängige Gleichungen aufspalten, die das raum-zeitliche Verhalten von E_1 in den jeweiligen Frequenzbereichen beschreiben. Diese drei Gleichungen lassen sich einheitlich mit einer einzigen Gleichung formulieren, wenn wir neue, dimen-

sionslose Variable einführen und diese für die einzelnen Frequenzbereiche verschieden definieren. Für den Bereich der Rayleigh-Linie definieren wir daher:

$$\begin{aligned}\tau &= \Gamma_R t/2, \\ z &= 1 - i 2 \omega / \Gamma_R, \\ L &= (\hat{g}_R^a - \hat{g}_R^c) \hat{I}_0 z.\end{aligned}\quad (34)$$

Im Bereich der Brillouin-Linie gilt

$$\begin{aligned}\tau &= \Gamma_B t/2, \\ z &= 1 - i 2 (\omega \pm \omega_B) / \Gamma_B, \\ L &= [\pm i \hat{g}_B^e / 2 - \hat{g}_B^a + \hat{g}_B^c] \hat{I}_0 z.\end{aligned}\quad (35)$$

Das positive Vorzeichen gilt für die anti-Stokes, das negative für die Stokes-Seite. τ ist eine auf die Linienbreite normierte Zeit, und z stellt eine normierte, komplexe Frequenz dar. Die Größe L ist ein Maß für die Verstärkung. Im stationären Fall der STRS bedeutet bei $\omega = -\Gamma_R/2$ z. B. $L = 1$, daß ein einfallendes Signal auf den e -fachen Wert verstärkt worden ist.

Für die Pumpintensität wurde angesetzt

$$I_0(\tau) = \hat{I}_0 H^2(\tau). \quad (36)$$

$H(\tau)$ beschreibt den reinen zeitlichen Verlauf der Feldstärke, während \hat{I}_0 die maximale Pumpintensität angibt. Mit den in (34) bis (36) eingeführten dimensionslosen Größen läßt sich Gl. (24) für einen Frequenzbereich schreiben

$$\frac{\partial}{\partial L} E_1(L, \tau) = i H(\tau) \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' H(\tau') E_1(L, \tau') e^{-z(\tau-\tau')}. \quad (37)$$

Diese Integro-Differentialgleichung kann mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes gelöst werden:

³² R. Y. CHIAO u. P. A. FLEURY, Physics of Quantum Electronics; P. L. KELLEY, B. LAX u. P. E. TANNENWALD, Eds., McGraw-Hill Book Co., New York 1966, p. 241 – 252.

³³ A. LAUBEREAU, W. ENGLISCH u. W. KAISER, IEEE J. Quant. Electr. **QE-5**, 410 [1969].

$$E_1(L, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(\tau) L^n. \quad (38)$$

$S_0(\tau) = E_1(0, \tau)$ stellt den zeitlichen Verlauf der Feldstärke der unverstärkten Signalwelle dar.

Einsetzen des Ansatzes (38) in (37) liefert für $S_n(\tau)$ die Rekursionsformel

$$S_n(\tau) = \frac{i}{n} \int_{-\infty}^{\tau} d\tau' H(\tau') S_{n-1}(\tau') e^{-\kappa(\tau-\tau')} \quad (n=1, 2, 3, \dots). \quad (39)$$

Mit den Gln. (38) und (39) haben wir jetzt die Möglichkeit, die Verstärkung

$$V(L, \tau) = (|E_1(L, \tau)|^2 / |E_1(0, \tau)|^2) - 1 \quad (40)$$

für jeden beliebigen Eingangsimpuls $E_1(0, \tau)$ und $\sqrt{I_0} H(\tau)$ zu berechnen.

Da (39) sich analytisch nur für wenige Impulsformen auswerten läßt, müssen die Lösungen in praktischen Fällen numerisch mit der Rechenmaschine berechnet werden. Ergebnisse von solchen Rechenmaschinenrechnungen werden für den Fall der STRS später diskutiert.

Doch zunächst soll eine analytische Lösung angegeben werden für den speziellen Fall einer Stufenfunktion als Eingangsimpuls.

Stufenfunktion

Mit Hilfe der Stufenfunktion $\Theta_0(\tau)$ lassen sich unsere Eingangsimpulse $E_1(0, \tau)$ und $H(\tau)$ schreiben:

$$E_1(0, \tau) = \hat{E}_1 \Theta_0(\tau), \quad H(\tau) = \Theta_0(\tau).$$

Für diese speziellen Funktionen kann das Integral in (39) einfach berechnet werden und die vollständige Auswertung der Rekursionsformel liefert für $E_1(L, \tau)$ eine geschlossene Lösung

$$E_1(L, \tau) = E_1(0, \tau) \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{iL}{\kappa} \right)^n \cdot \left[1 - e^{-\kappa\tau} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m!} (\kappa\tau)^m \right] \right\}. \quad (41)$$

Für Vergleiche mit experimentellen Beobachtungen ist es wichtig, die Verstärkung $V(L, \tau)$ zu kennen. Mit Gl. (40) erhalten wir

$$V = i(a_1 L/\kappa - a_1^* L^*/\kappa^*) + [|a_1 L/\kappa|^2 - a_2(L/\kappa)^2/2 - a_2^*(L^*/\kappa^*)^2/2] + \dots \quad (42)$$

mit $a_1 = 1 - e^{-\kappa\tau}$, $a_2 = 1 - (1 + \kappa\tau) e^{-\kappa\tau}$.

Der Ausdruck (42) stellt ein wichtiges Ergebnis dar. Durch Einsetzen der Definitionen (34) oder (35)

erhalten wir explizit die zeitabhängige Verstärkung V des betreffenden stimulierten Streueffekts für den Fall kleiner Verstärkung.

Im nächsten Kapitel wollen wir die zeitabhängigen Lösungen dazu benutzen, einen speziellen Streueffekt, nämlich die STRS, genauer zu untersuchen.

5. Transientes Verhalten der STRS

Da die zeitabhängige Verstärkung durch SBS und STBS bereits von Pohl und Kaiser eingehend behandelt worden ist⁹, wollen wir die Diskussion der allgemeinen Lösungen auf die STRS beschränken. Durch eine einfache Transformation $g_R^a \rightarrow -g_R^a$ lassen sich die Ergebnisse auch auf die reine stimulierten Rayleigh-Streuung übertragen.

Die Diskussion soll für zwei verschiedene Impulsformen durchgeführt werden: Für die Stufenfunktion, deren analytische Lösung wir kennen, und für die Gauß-Funktion, die den zeitlichen Verlauf eines Laserimpulses näherungsweise beschreibt. Für die folgenden Untersuchungen ist es zweckmäßig, neben der in Gl. (40) eingeführten Verstärkung V einen zeitabhängigen Verstärkungsfaktor der STRS $g_R^a(L, \omega, \tau)$ einzuführen in Analogie zu dem in Gl. (29) definierten stationären Gewinnfaktor g_{stat} . Dieser neue Gewinnfaktor ist eine Funktion der Frequenzverschiebung ω und am transienten Bereich auch eine Funktion des Verstärkungsparameters $L = \hat{g}_R^a \hat{I}_0 z$. Der Zusammenhang zwischen der Verstärkung V_R und $g_R^a(L, \omega, \tau)$ ist durch die Beziehung gegeben

$$V_R = \exp\{g_R^a(L, \omega, \tau) H^2(\tau) L / \hat{g}_R^a\} - 1.$$

A. Stufenfunktion

Als erstes wollen wir das zeitliche Verhalten der Verstärkung für sehr kleine Zeiten und kleine Frequenzverschiebungen studieren. Es muß also gelten $|\kappa\tau| \ll 1$. In diesem Fall können wir die rechte Seite der Gl. (42) nach Potenzen von $\kappa\tau$ entwickeln und wir erhalten in 1. und 2. Ordnung

$$V_R = t^2 (-\omega G_R + G_R^2/2) \quad (43)$$

$$\text{mit } G_R = \Gamma_R \hat{g}_R^a \hat{I}_0 z / 2. \quad (43 \text{ a})$$

Gleichung (43) zeigt für die Stufenfunktion die wesentlichen nichtstationären Eigenschaften der STRS:

1. Die transiente Verstärkung beginnt quadratisch mit der Zeit t .

2. Die Abhängigkeit der Verstärkung von der Frequenz ω ist linear und wird durch die Größe G_R und die Zeit t^2 bestimmt.
3. Für $\omega = 0$ existiert in 2. Ordnung eine positive Verstärkung, die proportional G_R^2 und damit proportional a^2, \hat{I}_0^2 und z^2 ist.

Zum Vergleich sei hier kurz die Verstärkung der SBS für $\omega = \omega_B$ und für kleine Zeiten angegeben.

$$V_B = t G_B \quad (44)$$

mit $G_B = \Gamma_B \hat{g}_B^e \hat{I}_0 z/2$. (44 a)

Die Verstärkung der SBS wächst in 1. Näherung linear mit der Zeit und ist proportional zu G_B .

Für die Untersuchung des Übergangs von kleinen Zeiten zum stationären Zustand wird die Bedingung $|\omega \tau| \ll 1$ aufgehoben. Die Verstärkung V_R ist dann durch Gl. (42) gegeben. Der Ausdruck für V_R soll hier jedoch nicht im einzelnen diskutiert werden, da der Übergang in den stationären Zustand besser an Hand des zeitabhängigen Gewinnfaktors $g_R^a(L, \omega, \tau)$ studiert werden kann.

Der spektrale und zeitliche Verlauf von $g_R^a(L, \omega, \tau)$ wurde mit Hilfe einer Rechenmaschine berechnet.

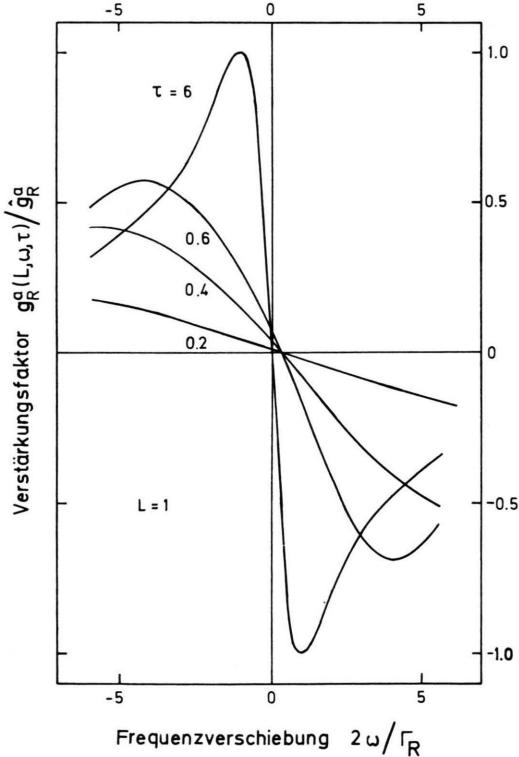


Abb. 2. Frequenzabhängigkeit des zeitabhängigen, normierten Verstärkungsfaktors der STRS zu verschiedenen Zeiten $\tau = \Gamma_R t/2$ berechnet für Stufenfunktion und $L = g_R^a \hat{I}_0 z = 1$.

Die Abb. 2 zeigt für $L = 1$ den spektralen Verlauf des normierten, zeitabhängigen Gewinnfaktors $g_R^a(L, \omega, \tau) / g_R^a$ für verschiedene Zeiten τ . Wir sehen, daß für sehr kleine Zeiten das Maximum des Gewinnfaktors frequenzverschoben ist. Für größere Zeiten wird der Verlauf bei $\omega = 0$ steiler und das Maximum nähert sich dem Maximum des stationären Gewinnfaktors. Zur Zeit $\tau = 6$ ist der g -Faktor vom stationären nicht zu unterscheiden. Man beachte, daß der spektrale Verlauf von $g_R^a(L, \omega, \tau)$ für kleine Zeiten asymmetrisch ist und bei $\omega = 0$ eine positive Verstärkung zeigt.

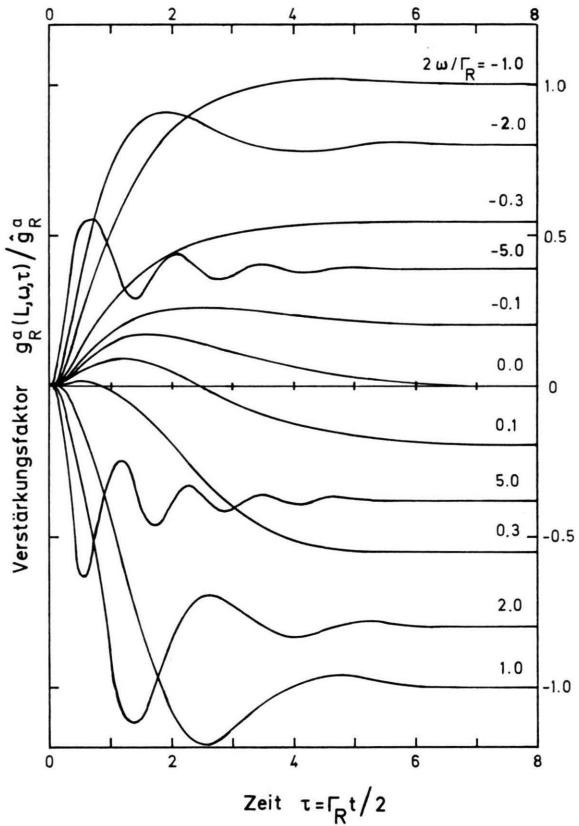


Abb. 3. Zeitlicher Verlauf des normierten Verstärkungsfaktors der STRS für verschiedene Frequenzverschiebungen, berechnet für Stufenfunktion und $L = g_R^a \hat{I}_0 z = 1$.

Das zeitliche Einschwingen des Gewinnfaktors in seinen stationären Zustand kann in Abb. 3 für verschiedene Frequenzen studiert werden. Wir erkennen deutlich die transiente Verstärkung bei $\omega = 0$. Der g -Faktor wächst zunächst quadratisch mit der Zeit, erreicht ein Maximum und fällt dann auf Null zurück. Für Zeiten $\tau > 6$ ist der stationäre Zustand weitgehend erreicht. Der Einfluß dieses transien-

ten Effekts ist bei kleinen Frequenzverschiebungen $|\omega \Gamma_R/2| \ll 1$ noch deutlich zu sehen. Bei sehr kleinen, positiven Frequenzverschiebungen beobachten wir noch für einen kurzen Zeitbereich positive Verstärkung. Erst nach einer gewissen Zeit wird der Verstärkungsfaktor negativ und erreicht zur Zeit $\tau \approx 6$ seinen stationären Wert. Starke Oszillationen beobachten wir bei Frequenzen $|\omega \Gamma_R/2| > 1$. Die Zahl der Oszillationen nimmt mit wachsender Frequenzverschiebung zu. Diese Oszillationen sind darauf zurückzuführen, daß sich zu Beginn des Verstärkungsprozesses zwischen der elektrischen Erregung $E_0 E_1^*$ und der Dichtewelle noch keine konstante Phase eingestellt hat.

B. Gauß-Funktion

Wir haben gesehen, daß Einschwingvorgänge in den stationären Zustand sich mit Hilfe einer Stufenfunktion recht gut studieren lassen.

Als nächstes wollen wir die nichtstationäre Verstärkung für zwei Gauß-Impulse als Eingangsimpulse untersuchen. Dieser Fall ist von Bedeutung, da er der experimentellen Situation angenähert entspricht. Unsere Gauß-Impulse sind durch zwei Parameter charakterisiert, durch die maximale Intensität \hat{I}_m ($m = 0, 1$) und durch die normierte Halbwertsbreite $\tau_h = \Gamma_R t_h/2$.

Aus dem Lösungsansatz (38) folgt, daß sich die Verstärkung V allgemein entwickeln läßt:

$$V = C_1(\omega, \tau) L + C_2(\omega, \tau) L^2 + \dots \quad (45)$$

Die Koeffizienten $C_1(\omega, \tau)$ und $C_2(\omega, \tau)$ sind im allgemeinen komplizierte Funktionen von ω und τ , die verschieden sind für jede Eingangsimpulsform. Für Gauß-Impulse als spezielle Eingangsimpulse sind C_1 und C_2 Funktionen von τ_h . Wenn L reell ist, was für alle stimulierten Streuprozesse außer für die SBS gilt, so kann man zeigen, daß für $\omega = 0$ C_1 gleich Null und C_2 von Null verschieden ist. Es gilt also ganz allgemein für jeden Impuls, daß im Fall kleiner Verstärkung bei $\omega = 0$ die transiente Verstärkung V quadratisch mit L wächst.

In Abb. 4 ist für verschiedene Frequenzverschiebungen der zeitliche Verlauf des Verstärkungsfaktors $g_R^a(L, \omega, \tau)$ für $L = 1$ und für zwei gleiche Gauß-Impulse $\tau_h = 1$ dargestellt. Die Zeit $\tau = 0$ bezeichnet das Maximum der unverstärkten Impulse. Qualitativ stimmt das Verhalten des Verstärkungsfaktors mit den Ergebnissen überein, die wir mit der Stufenfunktion gewonnen haben. Als wesentliche Eigenschaft kommt jetzt hinzu, daß der zeitabhän-

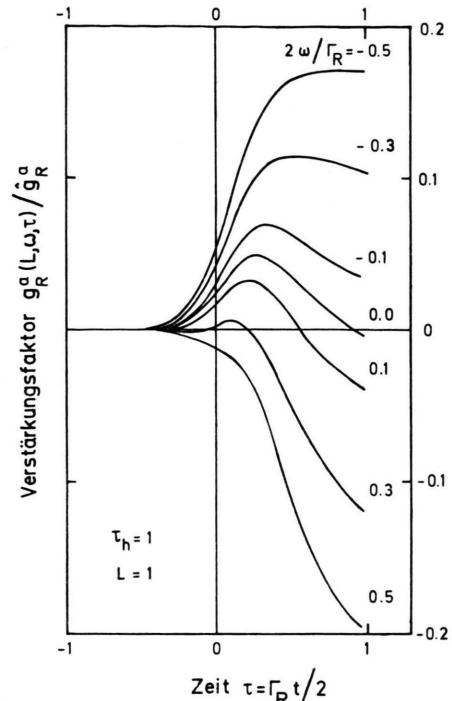


Abb. 4. Zeitlicher Verlauf des normierten Verstärkungsfaktors der STRS für verschiedene Frequenzverschiebungen, berechnet für Gauß-Funktion mit der Halbwertsbreite $t_h = 2/\Gamma_R$ und $L = \hat{g}_R^a \hat{I}_0 z = 1$.

gige g -Faktor durch den Impuls zusätzlich beeinflußt ist.

Wir sehen, daß merkliche Verstärkung bei den verschiedenen Frequenzen nahezu am gleichen Zeitpunkt einsetzt. Der g -Faktor für $\omega = 0$ erreicht kurz nach dem Impulsmaximum $\tau = 0$ einen maximalen Wert und wird am Ende des Impulses negativ. Die zeitliche Lage des Verstärkungsmaximums zum Impulsmaximum ist eine Funktion der Impulsbreite. Die Möglichkeit, die sich hieraus für die Bestimmung der Rayleigh-Linienbreite ergibt, wird im letzten Kapitel diskutiert.

Wie im Fall der Stufenfunktion erkennen wir auch in Abb. 4, daß der Gewinnfaktor in bezug auf positive und negative Frequenzverschiebungen nicht symmetrisch ist. So beobachten wir ebenfalls bei sehr kleinen positiven Frequenzen einen Gewinn zu Beginn der Wechselwirkung.

C. Transiente Verstärkung bei $\omega = 0$

Ein wichtiges Ergebnis der Theorie der nichtstationären STRS ist die unerwartete transiente Verstärkung eines schwachen Lichtimpulses, der die

gleiche Frequenz besitzt wie der Pumpimpuls. Diesen Verstärkungseffekt wollen wir jetzt etwas genauer untersuchen.

Hierzu schreiben wir Gl. (37) in einer anderen Form. Wir spalten die komplexe Signalamplitude E_1 in Betrag und Phase auf

$$E_1(L, \tau) = \bar{E}_1(L, \tau) e^{i\psi_1(L, \tau)}$$

und erhalten für $z=1$, d. h. $\omega=0$, und unter Annahme von Stufenfunktionen als Eingangsimpulse zwei gekoppelte Integro-Differentialgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial L} \bar{E}_1(L, \tau) = \int_0^\tau d\tau' \bar{E}_1(L, \tau') \sin[\psi_1(L, \tau') - \psi_1(L, \tau)] e^{\tau' - \tau}, \quad (46)$$

$$\bar{E}_1(L, \tau) \frac{\partial}{\partial L} \psi_1(L, \tau) = \int_0^\tau d\tau' \bar{E}_1(L, \tau') \cos[\psi_1(L, \tau') - \psi_1(L, \tau)] e^{\tau' - \tau}. \quad (47)$$

Gleichung (46) zeigt, daß wir für $\omega=0$ nur dann Verstärkung erwarten können, wenn die Phase der Signalamplitude eine Funktion der Zeit ist. In diesem Fall ist der Sinus unter dem Integral von Null verschieden. Die räumliche und zeitliche Änderung der Phase folgt aus Gl. (47). Für kleine Verstärkung liefert eine Näherungslösung dieser Gleichung in 1. Ordnung

$$\psi_1(z, t) = \hat{g}_R^a \hat{I}_0 z (1 - e^{-\Gamma_R t/2}). \quad (48)$$

Der Verlauf der Phase $\psi_1(z, t)$ ist für $\hat{g}_R^a \hat{I}_0 z = 1$ und $\omega=0$ in Abb. 5 dargestellt.

ψ_1 wächst zunächst zeitlich linear mit der Steigung $\hat{g}_R^a \hat{I}_0 z$ und nähert sich dann asymptotisch der

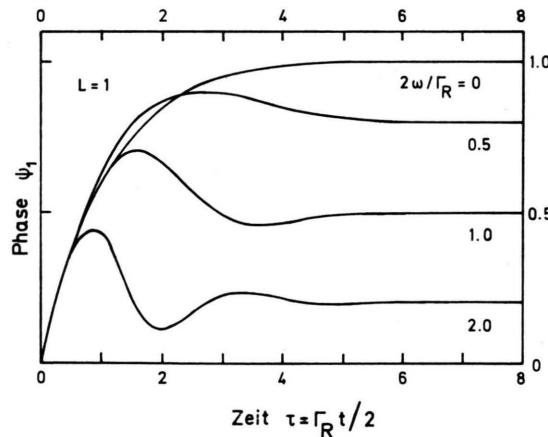


Abb. 5. Zeitliches Verhalten der Phase ψ_1 der Signalamplitude für verschiedene Frequenzverschiebungen, berechnet für Stufenfunktion und $L = \hat{g}_R^a \hat{I}_0 z = 1$.

konstanten Phase $\hat{g}_R^a \hat{I}_0 z$. Wir haben also einen zeitlichen Bereich, wo die Phase der Signalamplitude sich zeitlich ändert; das bedeutet, daß wir in diesem Bereich eine Verstärkung zu erwarten haben.

In Abb. 5 ist der zeitliche Verlauf der Phase noch für verschiedene Frequenzverschiebungen dargestellt. Wir beobachten für ψ_1 ein ähnliches Oszillieren, wie wir es schon bei den zeitabhängigen g -Faktoren gesehen haben. Die stationäre Phasenänderung ist bei $\omega=0$ am größten und nimmt mit zunehmender Frequenzverschiebung ab.

In Gl. (48) ist zu beachten, daß ψ_1 räumlich nicht konstant ist, sondern linear mit z zunimmt. Im Stationären bedeutet dies eine Verkleinerung des k_1 -Vektors um den Betrag $\hat{g}_R^a \hat{I}_0$.

6. Abhängigkeit der stimulierten Streuung vom Streuwinkel

In dieser Arbeit wurde eine Theorie der stimulierten Streuung entwickelt, die auch die Abhängigkeit der Verstärkung vom Streuwinkel berücksichtigt. Infolge der speziellen Randbedingungen gelten die hier diskutierten Lösungen in absorbierenden Medien nur im Winkelbereich $|\alpha z / \cos \Theta| \ll 1$. Außerdem wird der Gültigkeitsbereich unserer Lösung noch durch die Bedingung (10 b) und (11 b) eingeschränkt.

Die Winkelabhängigkeit ist in unserer Theorie implizit in den Größen Γ_R , Γ_B , ω_B und in den verschiedenen Kopplungskonstanten enthalten.

Wegen der Abhängigkeit des Wellenzahlvektors \mathbf{k} vom Streuwinkel, siehe Gl. (7), ist Γ_R und Γ_B proportional zu $\sin^2(\Theta/2)$. Dies hat zur Folge, daß bei Vorwärtsstreuung unter kleinem Winkel die Lebensdauer der Fluktuationen sehr groß und damit die stimulierten Streuprozesse sehr nichtstationär sind.

Wie früher bereits erwähnt wurde, ist die Kopplungskonstante γ^e vom Streuwinkel unabhängig. Dagegen ist die thermo-optische Kopplungskonstante γ^a proportional zu $\sin^{-1}(\Theta/2)$. Aus der Definitionsgleichung (20) folgt, daß die Kopplungskonstante γ^e proportional zu $\sin(\Theta/2)$ ist. Diese unterschiedliche Winkelabhängigkeit der verschiedenen Kopplungskonstanten führt zu folgenden Proportionalitätsrelationen für die einzelnen stationären Gewinnfaktoren:

$$g^e \propto \sin^{-1}(\Theta/2) \quad \text{und} \quad g^a \propto \sin^{-2}(\Theta/2).$$

g^e ist vom Streuwinkel unabhängig.

Diese Relationen zeigen, daß für kleine Streuwinkel die stationären Gewinnfaktoren der stimulierten

thermischen Streuprozesse und der SBS sehr groß werden. Für einen Streuwinkel von $\Theta = 1^\circ$ z. B. ist der stationäre Gewinnfaktor der STRS ungefähr 10^4 -mal größer als bei 180° -Streuung.

Im folgenden wollen wir die Winkelabhängigkeit der zeitabhängigen Verstärkung V für die STRS und für die SBS untersuchen. Für die Stufenfunktion und für kleine Zeiten wird die Verstärkung V_R bzw. V_B durch die Gl. (43) bzw. (44) beschrieben. Mit den obigen Winkelrelationen erhalten wir als Ergebnis, daß die Verstärkung V_R in der Anfangsphase vom Streuwinkel unabhängig ist. Dagegen ist die Verstärkung V_B proportional zu $\sin(\Theta/2)$.

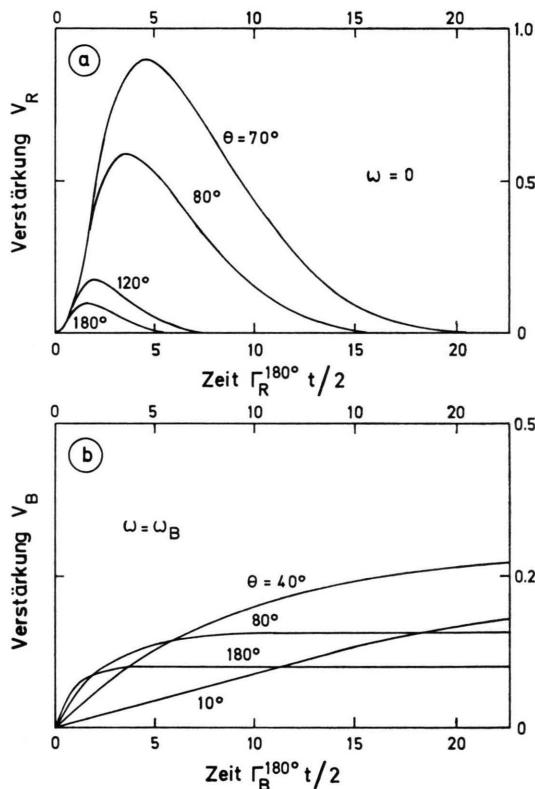


Abb. 6. (a) Zeitlicher Verlauf der Verstärkung V_R der STRS für verschiedene Streuwinkel, berechnet für Stufenfunktion und für $\omega=0$. (b) Zeitlicher Verlauf der Verstärkung V_B der SBS für verschiedene Streuwinkel, berechnet für Stufenfunktion und für $\omega=\omega_B$.

In Abb. 6 a und 6 b ist für den Fall der Stufenfunktion der zeitliche Verlauf von V_R für $\omega=0$ und der zeitliche Verlauf von V_B für $\omega=\omega_B$ für verschiedene Streuwinkel Θ dargestellt. Der Zeitmaßstab ist auf die Linienbreite bei 180° -Streuung normiert. Wir sehen, daß die Verstärkung V_R für alle

Streuwinkel quadratisch gleich mit der Zeit anwächst. Das Maximum der Verstärkung wird bei kleinen Streuwinkeln infolge der kleiner werdenden Linienbreite später erreicht. Da für $\omega=0$ bei kleiner Verstärkung allgemein $V_R \propto (\hat{g}_R^a \hat{l}_0 z)^2$ gilt, siehe Gl. (45), ist das transiente Maximum der Verstärkung proportional zu $\sin^{-4}(\Theta/2)$. Das bedeutet, daß für kleine Streuwinkel das Maximum sehr groß werden kann.

Im Gegensatz zur STRS steigt die Verstärkung V_B der SBS bei kleinen Streuwinkeln zeitlich langsamer an. Der stationäre Zustand wird später erreicht.

Die Ursache für das unterschiedliche zeitliche Anwachsen der Verstärkung liegt in dem unterschiedlichen Mechanismus für die Erzeugung der Dichtewelle. Bei der STRS erfolgt die Erzeugung der Dichtewelle primär über die Erzeugung einer Temperaturwelle. Aus Gl. (3) geht hervor, daß die zeitliche Änderung von T_1 proportional zu E^2 ist und damit die zeitliche Änderung der Amplitude der Temperaturwelle unabhängig ist vom Wellenvektor \mathbf{k} der Temperatur- bzw. Dichtewelle. Das bedeutet, daß die Temperaturwelle für alle Streuwinkel gleich schnell aufgebaut wird.

Bei der SBS wird die Dichtewelle durch reine Elektrostriktion erzeugt und die zeitliche Änderung von ϱ_1 ist damit proportional $\nabla^2 E^2$ [siehe Gl. (2)]. Damit ist die zeitliche Änderung der Amplitude der Dichtewelle proportional zur Erregung $E_0 E_1^*$ und proportional zu k^2 . Wegen der Winkelabhängigkeit des Wellenvektors \mathbf{k} wird daher die Dichtewelle bei kleinen Streuwinkel langsamer aufgebaut.

Als wichtiges Ergebnis der kurzen Untersuchung der Winkelabhängigkeit halten wir fest, daß bei kurzen Impulsen, d. h. bei Impulsen der Halbwertsbreite t_h kleiner als $2/\Gamma_R$ bzw. $2/\Gamma_B$, die Verstärkung V_B in Vorwärtsrichtung kleiner wird, dagegen ist die Verstärkung V_R vom Winkel unabhängig. Die STRS kann daher in Vorwärtsrichtung große Verstärkungen liefern. Das kann zur Folge haben, daß in stark absorbierenden Medien z. B. durch Tyndall-Streuung vorwärtsgerichtetes Streulicht verstärkt wird. Diese Verstärkung führt so zu einer Aufweitung des Laserbündels. Derartige Bündel-aufweitungseffekte sind mit „mode-locked“-Laser-impulsen²⁶ und mit normalen Riesenimpulsen beobachtet worden³⁴.

³⁴ W. ROTHER, H. MEYER u. W. KAISER, Phys. Letters 31 A, 245 [1970]. — H. EICHLER u. B. KLUZOWSKI, Z. Angew. Phys. 28, 306 [1970].

7. Induzierte Beugungseffekte

Bei der Untersuchung der Winkelabhängigkeit der stimulierten Streuung in absorbierenden Medien haben wir Streueffekte höherer Ordnung im Streuwinkel bisher nicht berücksichtigt. Solche Streueffekte sind sowohl in sättigbaren³⁰ als auch in nichtsättigbaren^{24, 26} Farbstofflösungen beobachtet worden.

Wenn zwei Lichtbündel mit gleicher Frequenz unter kleinem Winkel in einem absorbierenden Medium wechselwirken, so werden periodische Dichteänderungen bzw. Brechungsindexänderungen erzeugt, die als Phasengitter wirken und einen Teil des einfallenden Lichts in verschiedene Richtungen beugen. Wir sprechen daher auch von einer induzierten Beugung. Dieser Effekt tritt auch bei sättigbaren Farbstofflösungen auf, doch mit dem Unterschied, daß dem Phasengitter noch ein Amplitudengitter überlagert ist. Durch Interferenz der beiden einfallenden Lichtwellen bildet sich eine periodisch modulierte Lichtintensität aus, die neben einer Brechungsindexmodulation zusätzlich eine räumliche Modulation des Absorptionskoeffizienten erzeugt. Diese periodischen Änderungen des Absorptionskoeffizienten haben die Eigenschaften eines Amplitudengitters.

In diesem Kapitel wollen wir unsere nichtstationäre Theorie erweitern und Effekte höherer Ordnung im Streuwinkel berücksichtigen. Der Einfachheit wegen beschränken wir uns nur auf solche Farbstofflösungen, die bei hohen Lichtintensitäten nicht ausbleichen.

Wir betrachten einen Satz von ebenen monochromatischen Lichtwellen mit der Frequenz ω_0 , die in einem absorbierenden Medium wechselwirken.

$$E_m(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \hat{y} [E_m(\mathbf{r}, t) \exp\{i(\omega_0 t - \mathbf{k}_m \cdot \mathbf{r})\} + \text{c.c.}] \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots). \quad (49)$$

E_0 ist wieder eine intensive Pumpwelle und E_1 eine schwache Signalwelle. Diese beiden Lichtwellen erzeugen durch lokales Aufheizen des Mediums infolge von Absorption eine periodische Dichteänderung ϱ_1 mit dem Wellenvektor \mathbf{k} .

$$\varrho_1(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [\varrho_1(\mathbf{r}, t) \exp\{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})\} + \text{c.c.}] \quad (50)$$

Durch Beugung an diesen Dichteänderungen entstehen neue Lichtwellen mit den Vektoren \mathbf{k}_m ($m \neq 0, 1$).

Für den Vektor \mathbf{k}_m gilt die Beziehung

$$\mathbf{k}_m = \mathbf{k}_0 - m \mathbf{k}.$$

Das Streudiagramm der verschiedenen k -Vektoren ist in Abb. 7 dargestellt. Im Gegensatz zu unserer

früheren Rechnung wählen wir diesmal das Koordinatensystem so, daß die z -Achse die Winkelhalbierende der beiden k -Vektoren \mathbf{k}_0 und \mathbf{k}_1 bildet. Der Wellenvektor \mathbf{k} ist somit senkrecht zur z -Achse gerichtet.

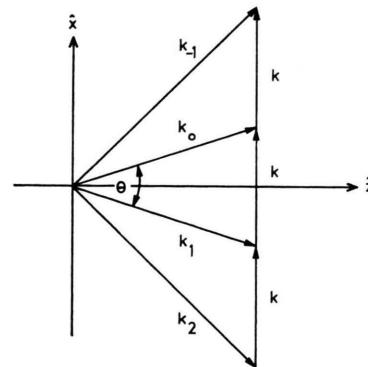


Abb. 7. Streudiagramm der Wellenvektoren \mathbf{k}_m .

Die Randbedingungen für die verschiedenen Wellen an der Stelle $z = 0$ lauten

$$E_0, E_1 \neq 0$$

$$\text{und} \quad E_m = 0 \quad (m \neq 0, 1).$$

Wie früher wählen wir für E_0 und E_1 eine ebene Randbedingung mit konstanten Amplituden und erreichen damit, daß die Lösungen nur von der z -Koordinate abhängen.

Die Berechnung der Dichteamplitude $\bar{\varrho}_1$ erfolgt analog wie in Abschnitt 2 und wir erhalten für den speziellen Fall $\omega = 0$

$$\bar{\varrho}_1(z, t) = - \frac{\gamma^2 k}{8 \pi v} \cdot \int_{-\infty}^t dt' e^{-\Gamma_R(t-t')/2} \sum E_m(z, t') E_{m+1}^*(z, t'). \quad (51)$$

Gleichung (51) berücksichtigt die Tatsache, daß die Streuwellen höherer Ordnung ebenfalls Dichteänderungen erzeugen.

Einsetzen des Ansatzes (49) in die Wellengleichung (1) liefert ein Gleichungssystem für die verschiedenen Wellen E_m

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + a/2 \cos(\Theta/2) - i \Delta K_m \right) E_m(z, t) = -i \frac{\gamma^e \omega_0}{4 n c \varrho_0 \cos(\Theta/2)} (\bar{\varrho}_1 E_{m+1} + \bar{\varrho}_1^* E_{m-1}) \quad (52)$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

wobei für $\Theta \ll 1$ gilt:

$$\Delta K_m \approx k_0 m (m - 1) \Theta^2 / 2. \quad (53)$$

Die Lösung der homogenen Gleichung lautet

$$E_m(z, t) = \bar{E}_m(z, t) \exp\{(i \Delta K_m - a/2 \cos(\Theta/2)) z\}.$$

Da alle Streuwellen die gleiche Frequenz besitzen, ist eine Phasenanpassung durch Dispersion wie z. B. bei der stimulierten Raman-Streuung nicht möglich. Die Streuwellen höherer Ordnung ($m \neq 0, 1$) besitzen daher eine Phasenverschiebung $\Delta K_m z$, die von Null verschieden ist und die mit wachsendem Streuwinkel zunimmt. Diese Nichtanpassung der Phase ist die Ursache dafür, daß die Streueffekte höherer Ordnung nur bei sehr kleinen Winkeln in Vorwärtsrichtung auftreten können.

Wegen den Randbedingungen und wegen der Annahme eines kleinen Signals kann das Gleichungssystem (51) und (52) sukzessiv gelöst werden, indem bei jedem Schritt die nächsthöheren Streuwellen vernachlässigt werden.

Wir beginnen mit $m=0$ und erhalten wegen $E_1/E_0 \ll 1$ in guter Näherung eine örtlich konstante Pumpwelle $\bar{E}_0(t)$. Für die Lösung \bar{E}_1 nehmen wir als zeitlichen Verlauf für die einfallenden Wellen Stufenfunktionen an und betrachten nur den rein transientes Fall $\Gamma_R t/2 \ll 1$. Für kleine Verstärkung und für $\alpha z \ll 1$ bekommen wir durch Reihenentwicklung und durch Vernachlässigung von \bar{E}_2 aus (51) und (52) die Lösung

$$\bar{E}_1(z, t) = \bar{E}_1(0, t) [1 + i(\Gamma_R \hat{g}_R^a I_0 t z/2) - (\Gamma_R \hat{g}_R^a I_0 t z/4)^2 + \dots]. \quad (53)$$

Diese Lösung benutzen wir zur Berechnung der Streuwellen \bar{E}_{-1} . Wegen $\Gamma_R t/2 \ll 1$ dürfen wir die Exponentialfunktion in Gl. (51) in 1. Näherung gleich eins setzen und wir bekommen für $m = -1$

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{E}_{-1} = i \Gamma_R \hat{g}_R^a I_0/2 \int_0^t dt' (\bar{E}_{-1} + \bar{E}_1) e^{-i \Delta K_{-1} z}. \quad (54)$$

Da wir nur kleine Verstärkungen betrachten, und \bar{E}_{-1} an der Stelle $z=0$ Null ist, liefert der 1. Summand unter dem Integral in erster Näherung noch keinen Beitrag. Für die Intensität I_{-1} erhalten wir in erster Näherung

$$I_{-1} = (\Gamma_R \hat{g}_R^a I_0 t z/2)^2 I_1(0, t) \left[\frac{\sin(\Delta K_{-1} z/2)}{\Delta K_{-1} z/2} \right]^2$$

Die Intensität der Streuwellen I_{-1} wächst quadratisch mit der Zeit und ist proportional zu $(\Gamma_R \hat{g}_R^a)^2$, zu I_1 und zu I_0^2 . Wie $I_1(z, t)$ ist auch I_{-1} in dieser Näherung von Γ_R abhängig. Der letzte Term in

(55) begrenzt den Winkelbereich der induzierten Beugung. Wenn wir als Grenzwinkel Θ_g den Winkel definieren, bei dem das Argument des Sinus den Wert π annimmt, so erhalten wir mit (53) die Beziehung

$$\Theta_g^2 = \frac{2 \pi}{k_0 z} = \frac{\lambda_0}{n z}. \quad (56)$$

λ_0 ist die Wellenlänge der Welle E_0 im Vakuum. Der Winkelbereich der induzierten Beugung wird bei kleinen Wechselwirkungslängen größer. Für eine Länge $z = 0,1$ cm und für die Wellenlänge des Rubinlasers beträgt der Grenzwinkel $2 \cdot 10^{-2}$ rad. Induzierte Beugung tritt also nur bei sehr kleinen Streuwinkeln auf. Für die experimentelle Beobachtung solcher Effekte sind daher intensive Lichtbündel mit sehr kleiner Divergenz erforderlich. Mit Hilfe der Beziehung (43) für die Verstärkung V_R der Signalwelle I_1 und mit Gl. (55) erhält man für das Verhältnis $I_{-1}/I_1(0, t)$ die nützliche Beziehung

$$I_{-1}/I_1(0, t) = 2 V_R \left[\frac{\sin(\Delta K_{-1} z/2)}{\Delta K_{-1} z/2} \right]^2. \quad (57)$$

Bei einem Streuwinkel von $\Theta = 5 \cdot 10^{-3}$ rad und einer Verstärkungslänge von $z = 0,1$ cm beträgt der quadratische Term auf der rechten Seite ungefähr 0,9. Wenn das einfallende Signal $I_1(0, t)$ um 10% verstärkt wurde, dann hat I_{-1} in diesem Fall bereits 18% der einfallenden Signalintensität erreicht. Es sei betont, daß V_R nur im nichtstationären Bereich als Parameter sinnvoll ist, im stationären kann z. B. als Parameter die erzeugte Dichteamplitude gewählt werden.

8. Methode zur Bestimmung der Rayleigh-Linienbreite

Zum Abschluß wollen wir als praktisches Ergebnis dieser theoretischen Untersuchungen eine Methode anbieten, mit der die Rayleigh-Linienbreite mit einem einzigen Laserschuß gemessen werden kann. Wir haben in Abb. 4 gesehen, daß bei Gauß-Impulsen für $\omega = 0$ der zeitabhängige Verstärkungsfaktor ein ausgeprägtes Maximum besitzt. Dieses Verstärkungsmaximum wird t_m nsec nach dem Impulsmaximum erreicht. Die Eigenschaft, daß diese Verzögerung t_m keine lineare Funktion der Impulsbreite t_h ist, wird hier benutzt, die Rayleigh-Linienbreite Γ_R aus t_m und t_h zu bestimmen.

Unsere Methode setzt also experimentell voraus, daß der Impuls des Riesenimpulslasers als Gauß-Impuls angenähert werden kann. Mit Hilfe einer

Verstärkeranordnung, wie sie in Ref. 20, 29 beschrieben wird, kann t_m auf einfache Weise experimentell bestimmt werden.

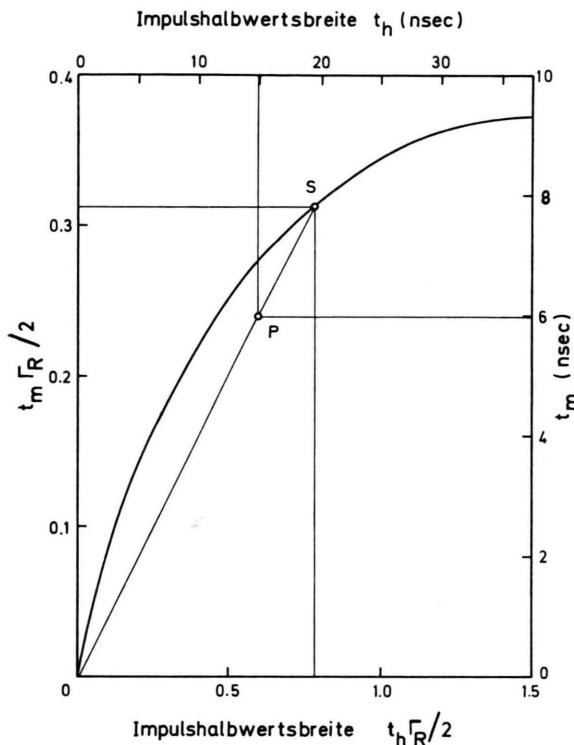


Abb. 8. Normierte Verzögerung des Verstärkungsmaximums $t_m \Gamma_R/2$ als Funktion der normierten Halbwertsbreite $t_h \Gamma_R/2$ für $\omega=0$.

Abbildung 8 zeigt den mit der Rechenmaschine berechneten Verlauf der normierten Zeit $t_m \Gamma_R/2$ als Funktion von $t_h \Gamma_R/2$. Die experimentell gemessenen Werte t_m und t_h werden im willkürlichen nsec-Maßstab als Punkt P eingezeichnet. Die Abszisse des Schnittpunkts S der Gerade OP mit der theoretischen Kurve liefert den entsprechenden Wert $t_h \Gamma_R/2$. Da t_h bekannt ist, kann Γ_R somit aus dem Abszissenwert des Schnittpunkts S berechnet werden.

Diese Methode gibt uns die Möglichkeit, mit Impulsen von der Halbwertsbreite der Größenordnung $2/\Gamma_R$ sehr kleine Linienbreiten mit einem einzigen Laserschuss zu messen, ohne dabei die Frequenz zwischen Pump- und Signalimpuls verstimmen zu müssen.

Mit Laserimpulsen einer Halbwertsbreite von 20 nsec ist es z. B. möglich, Rayleigh-Linienbreiten

von $\Gamma_R/2 \pi = 10$ MHz zu messen. Für noch kleinere Linienbreiten müßte man entsprechend längere Impulse verwenden.

9. Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde gezeigt, daß für das Verständnis der stimulierten Streuung die Kenntnis der nichtstationären Vorgänge von besonderer Bedeutung ist. Eine allgemeine Theorie wurde entwickelt, die für den Fall einer kleinen Verstärkung und eines kleinen Signals die stationäre und nichtstationäre Verstärkung von Licht durch stimulierte Streuung an Dichtefluktuationen beschreibt. Diese Theorie ist für die Beschreibung von Verstärkerexperimenten besonders gut geeignet. Ergebnisse von Verstärkerexperimenten mit der stimulierten Rayleigh-Streuung werden in Ref. 20, 29 mit dieser Theorie erfolgreich interpretiert.

Als spezieller Fall wurde in dieser Arbeit die stimulierte thermische Rayleigh-Streuung eingehend behandelt. Es wurde gezeigt, daß das Frequenzverhalten im nichtstationären Bereich sich wesentlich von dem im stationären unterscheidet. Eine positive, transiente Verstärkung bei der Frequenzverschiebung Null wurde gefunden. Dieses Ergebnis ist überraschend, da bei der stationären Streuung keine Verstärkung zu erwarten ist.

Die Abhängigkeit der Verstärkung vom Streuwinkel wurde in einem weiteren Kapitel bei verschiedenen stimulierten Streuprozessen untersucht. Es wurde gezeigt, daß die Verstärkung durch STRS für kleine Zeiten bzw. für kurze Impulse vom Streuwinkel unabhängig ist, während die Verstärkung durch die stimulierte Brillouin-Streuung in Vorwärtsrichtung kleiner wird. Bei sehr kleinen Streuwinkeln der Größenordnung 10^{-2} rad wurde das transiente Auftreten von induzierten Beugungseffekten bewiesen.

Im letzten Kapitel dieser Arbeit wurde eine Methode vorgeschlagen, mit der die Rayleigh-Linienbreite mittels eines einzigen Laserschusses aus transienten Streumessungen der STRS gemessen werden kann.

Der Autor dankt Herrn Prof. Dr. W. KAISER für sein förderndes Interesse und für die wertvolle Unterstützung bei der Durchführung dieser Arbeit. Herrn Dr. D. POHL und Herrn Dr. M. MAIER sei für ihre kritischen Diskussionen gedankt.